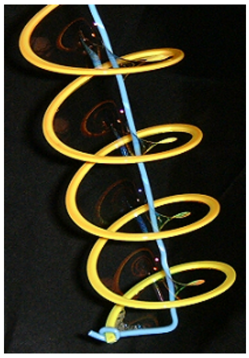
Мінімальна поверхня

В математиці , **мінімальна поверхня** є поверхнею , яка локально мінімізує його площа. Це еквівалентно наявності нульової середньої кривизни (див. Визначення нижче).



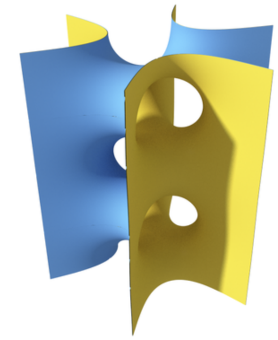
Гелікоїда мінімальна поверхня утворена за мильну плівку на спіральної рамі

Термін "мінімальна поверхня" використовується тому, що ці поверхні спочатку виникли як поверхні, що мінімізували загальну площу поверхні, що підлягає деякому обмеженню. Фізичні моделі мінімізації поверхонь з мінімальними поверхнями можна виготовити шляхом занурення дротяного каркаса в мильний розчин, утворюючи мильну плівку , яка є мінімальною поверхнею, межею якої є дротяний каркас. Однак термін використовується для більш загальних поверхонь, які можуть самостійно перетинатися або не мати обмежень. Для даного обмеження може також існувати кілька мінімальних поверхонь з різними площами (наприклад, див. Мінімальну обертівку поверхні): стандартні визначення стосуються лише локального оптимуму , а не глобального оптимуму .

Зміст

Визначення

Мінімальні поверхні можна визначити кількома рівнозначними способами в $\mathbf{R}^3$. Той факт, що вони є рівнозначними, служить для демонстрації того, як мінімальна теорія поверхні лежить на перехресті кількох математичних дисциплін, особливо диференціальної геометрії , обчислення варіацій , теорії потенціалів , комплексного аналізу та математичної фізики . [1]



Сідлова вежа мінімальна поверхня. Хоча будь-яка невелика зміна поверхні збільшує її площу, існують й інші поверхні з однаковою межею з меншою загальною площею.

> **Локальне визначення найменшої площі** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли кожна точка $p \in M$ має сусідство з найменшою площею відносно її межі.

Ця властивість є локальною: можуть існувати інші поверхні, які мінімізують площу краще за допомогою тієї самої глобальної межі.

> **Варіаційне визначення** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли вона є критичною точкою області, функціональної для всіх компактно підтримуваних варіацій .

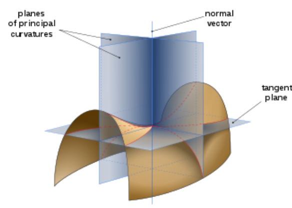
Це визначення робить мінімальні поверхні двовимірним аналогом геодезики .

> **Визначення плівкової мильної плівки** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли кожна точка $p \in M$ має сусідство $D_{p,}$ яке дорівнює унікальній ідеалізованій мильній плівці з межею ∂D_p

За рівнянням Юнга-Лапласа кривизна мильної плівки пропорційна різниці тисків між сторонами: якщо він дорівнює нулю, то мембрана має нульову середню кривизну. Сферичні бульбашки *не* є мінімальними поверхнями згідно з цим визначенням: хоча вони мінімізують загальну площу з обмеженням внутрішнього об'єму, вони мають позитивний тиск.

> **Середнє визначення кривизни** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли її середня кривизна збігається однаково.

Прямим наслідком цього визначення є те, що кожна точка на поверхні є точкою сідла з рівними та протилежними головними кривизнами .



Мінімальні площини кривизни поверхні. На мінімальній поверхні кривизна уздовж основних площин кривизни є рівною та протилежною у кожній точці. Це робить середню кривизну нульовою.

> **Визначення диференціального рівняння** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли вона може бути локально виражена у вигляді графіка рішення
>
> $$(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx} = 0$$

Парціальний диференціальне рівняння в цьому визначенні спочатку був знайдений в 1762 році Лагранжа , [2] і Жан Батист Меньє виявив в 1776 , що має на увазі зникаючу середню кривизну. [3]

> **Визначення енергії** : конформне занурення $X : M \to \mathbf{R}^3$ є мінімальним тоді і лише тоді, коли це критична точка енергії Діріхле для всіх компактно підтримуваних варіацій, або рівнозначно, якщо будь-яка точка $p \in M$ має сусідство з найменшою енергією відносно її межа.

Це визначення пов'язує мінімальні поверхні з гармонічними функціями та теорією потенціалів .

> **Гармонійне визначення** : якщо $X = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbf{R}^3$ являє собою ізометричне занурення з рімановаї поверхні в 3-простір, то X називаються мінімальним , коли $x_я$ є гармонійної функцією на M для кожного i .

Прямим наслідком цього визначення та принципу максимальності для гармонічних функцій є те, що в $\mathbf{R}^3$ немає компактних повних мінімальних поверхонь .

> **Визначення карти Гаусса** : Поверхня $M \subset \mathbf{R}^3$ мінімальна тоді і лише тоді, коли її стереографічно спроектована карта Гаусса $g : M \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ є мемоморфною по відношенню до основної структури поверхні Рімана , а M не є частинкою сфери .

Це визначення використовує , що середня кривизна дорівнює половина сліду від оператора форми , яка пов'язана з похідним відображенням Гаусса. Якщо проектована карта Гаусса підкоряється рівнянням Коші-Рімана, то або слід зникає, або кожна точка M є пупковою , і в цьому випадку вона є частинкою сфери.

> **Визначення середнього викривлення потоку** : Мінімальні поверхні є критичними точками для середнього викривлення . [4]

Найменша локальна та варіаційна дефініція дозволяють поширювати мінімальні поверхні на інші риманові багатовиди, ніж $\mathbf{R}^3$.

Історія

Теорія мінімальної поверхні бере свій початок із Лагранжа, який у 1762 р. Розглядав варіативну проблему знаходження поверхні $z = z(x, y)$ найменшої площі, розтягнутої по заданому замкнутому контуру. Він отримав рівняння Ейлера-Лагранжа для рішення

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0$$

Йому не вдалося знайти жодного рішення поза площиною. У 1776 р. Жан Батіст Марі Меснье виявив, що гелікоїд і катеноїд задовольняють рівнянню і що диференціальний вираз відповідає двократному середньому викривленню поверхні, роблячи висновок, що поверхні з нульовою середньою кривизною є мінімізацією площі.

Розширивши рівняння Лагранжа до

$$\left(1+z_x^2\right)z_{yy}-2z_xz_yz_{xy}+\left(1+z_y^2\right)z_{xx}=0$$

Гаспард Монж та Лежандр у 1795 р. Вивели формули подання для поверхонь розчину. Хоча Генріх Шерк в 1830 році їх успішно використовував для отримання його поверхонь , вони, як правило, вважалися практично непридатними. Каталонський доведено в 1842/43 , що гелікоїда є єдиним правили мінімальної поверхнею.

Прогрес був досить повільним до середини століття, коли проблема Бьорлінга вирішувалася за допомогою складних методів. Почався «перший золотий вік» мінімальних поверхонь. Шварц знайшов рішення проблеми плато для регулярного чотирикутника в 1865 році і для загального чотирикутника в 1867 році (що дозволяє побудувати його періодичні сімейства поверхонь), використовуючи складні методи. Вейерштрасса і Еннепер розробили більш корисні формули уявлень , міцно пов'язуючи мінімальні поверхні для комплексного аналізу і гармонійних функцій. Інші важливі внески надійшли від Белтрамі, Бонне, Дарбу, Лі, Римана, Серре та Вайнгартена.

Між 1925 і 1950 роками відновилася мінімальна теорія поверхні, в основному орієнтована на непараметричні мінімальні поверхні. Повне вирішення проблеми плато Джессі Дугласа та Тібора Радо стало важливою віхою. Проблема Бернштейна та робота Роберта Оссермана на повних мінімальних поверхнях кінцевої сумарної кривизни також були важливими.

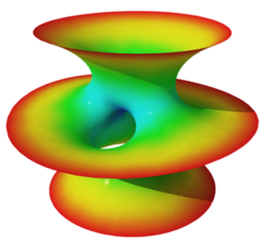
Ще одне відродження почалося у 1980-х роках. Однією з причин стало відкриття в 1982 році Сельсо Костою поверхні, яка спростувала здогадки, що площина, катеноїд та гелікоїд є єдиними повноцінними вбудованими мінімальними поверхнями в $\mathbf{R}^3$ кінцевого топологічного типу. Це не тільки стимулювало нову роботу з використання старих параметричних методів, але й продемонструвало важливість комп'ютерної графіки для візуалізації досліджуваних поверхонь та чисельних методів для вирішення "задачі періоду" (при використанні методу спряженої поверхні для визначення поверхневих патчів, які можуть бути зібрані в більшу симетричну поверхню, для отримання вбудованої поверхні потрібно численні відповідність певних параметрів). Ще однією причиною стала перевірка Х. Карчером того, щопотрійні періодичні мінімальні поверхні, спочатку емпірично описані Аланом Шоен у 1970 році, насправді існують. Це призвело до багатого керування поверхнями сімейства поверхонь та способів отримання нових поверхонь із старих, наприклад, додаючи ручки або спотворюючи їх.

В даний час в теорії мінімальних поверхонь урізноманітнив до мінімальних одмногообразій інших зовнішніх геометрій, стає ставлення до математичної фізики (наприклад, позитивна маса гіпотези , то гіпотеза Пенроуза) і три-різноманіття геометрії (наприклад, гіпотеза Сміт , то гіпотеза Пуанкаре , то Терстон Геометризация Концепция).

Приклади

Класичні приклади мінімальних поверхонь включають:

- площину , яка є тривіальним випадком
- катеноїди : мінімальні поверхні, зроблені обертанням одного каналу один раз навколо його прямої лінії
- гелікоїди : поверхня змітається лінією, що обертається з рівномірною швидкістю навколо осі, перпендикулярної до лінії, і одночасно рухається по осі з рівномірною швидкістю



Мінімальна поверхня Кости

Поверхні золотого століття 19 століття включають:

- Мінімальні поверхні Шварца : потрійні періодичні поверхні, що заповнюють $\mathbf{R}^3$
- Мінімальна поверхня Рімана : Посмертно описана періодична поверхня
- поверхню Еннепера
- поверхню Henneberg : перша неорієнтіруемая мінімальна поверхню
- Мінімальна поверхня Бура

Сучасні поверхні включають:

- Gyroid : Одна з поверхонь 1970 Шоен, в трикратно періодична поверхню , являє особливий інтерес для жидкокристаллической структури
- Сідло вежі сім'я: узагальнення другий поверхні Шеркі в
- Мінімальна поверхня Кости : знаменита гіпотеза. Описаний у 1982 році Сельсо Костою, а пізніше візуалізував Джим Гофман . Потім Джим Гофман, Девід Гофман та Вільям Мікс III розширили визначення, щоб створити сімейство поверхонь з різною обертальною симетрією.
- поверхню Чен–Gackstatter сім'ї, додаючи ручки до поверхні Еннепера.

Узагальнення та посилання на інші поля

Мінімальні поверхні можуть бути визначені в інших різновидах, ніж $\mathbf{R}^3$, таких як гіперболічний простір , простори більш високих розмірів або риманові колектори .

Визначення мінімальних поверхонь може бути узагальнені / продовжено до постійної середньої кривизни поверхні : поверхні з постійною середньою кривизною, які не потребують рівному нулі.

У дискретній диференціальній геометрії вивчаються дискретні мінімальні поверхні: спрощені комплекси трикутників, які мінімізують їх площу під невеликими збуреннями їх вершинних положень. [5] Такі дискреції часто використовуються для наближення мінімальних поверхонь чисельно, навіть якщо невідомі вирази закритої форми.

Рух Брауна на мінімальній поверхні призводить до імовірнісних доказів декількох теорем на мінімальних поверхнях. [6]

Мінімальні поверхні стали областю інтенсивного наукового вивчення, особливо в галузях молекулярної інженерії та матеріалознавства , завдяки передбачуваному їх застосуванню при самостійному складанні складних матеріалів. ендоплазматичнийретикулум , важлива структура в клітинної біології, пропонується перебувати під тиском еволюційного , щоб відповідати нетривіальною мінімальної поверхні [7] .

Мінімальні поверхні відіграють певну роль у загальній відносності . Відомий горизонт (трохи зовнішня захоплена поверхню) є мінімальною гіперповерхні, пов'язуючи теорію чорних дір до мінімальних поверхонь і проблеми Плато . [8] [9]

Мінімальні поверхні є частиною генеративної панелі інструментів дизайну, яку використовують сучасні дизайнери. В архітектурі був великий інтерес до розтяжних конструкцій , тісно пов'язаних з мінімальними поверхнями. Відомий приклад є Olympiapark в Münich від Фрея Отто , натхненний мильних поверхонь.

У мистецькому світі, серед скульптур Роберта Енгмана (1927–2012 рр.), Роберта Лонгюрста (1949 р.) Та Чарльза О. Перрі (1929–2011 рр.), Інтенсивно досліджено мінімальні поверхні .

Дивіться також

- Проблема Бернштейна
- Білінеарна інтерполяція
- Брайант поверхня
- Кривизна
- Параметризація Еннепера – Вайерштрасса
- Гармонічна карта
- Гармонічний морфізм
- Проблема плато
- Мінімальна поверхня Шварца
- Мильна бульбашка
- Поверхневий евольвер
- Метод натягнутої сітки
- Напружна структура
- Потрійна періодична мінімальна поверхня
- Структура Вейра – Фелана

Список літератури

1. Меекс, Вільям Х., III; Перес, Хоакін (2011). "Класична теорія мінімальних поверхонь". *Бик. Амер. Математика. Соц.* 48 (3): 325–407. doi : 10.1090 / s0273-0979-2011-01334-9 (https://doi.org/10.1090%2Fs0273-0979-2011-01334-9) . MR 2801776 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2801776) .
2. JL Лагранж. Essai d'une nouvelle methode pour deterter les maxima et les minima des formules integrales indefinies. Miscellanea Taurinensia 2, 325 (1): 173 {199, 1760.
3. JB Meusnier. Mémoire sur la courbure des surface. Mém. Mathém. Фіз. Акад. Наук. Париж, prés. par div. Саванс, 10: 477–510, 1785. Представлений у 1776 році.
4. Холод, Тобіас Н .; Minicozzi, William P., II (2004). "Простір вбудованих мінімальних поверхонь фіксованого роду в 3-х колекторах. II. Багатозначні графіки на дисках". *Енн. математики.* **160** (1): 69–92. doi : 10.4007 / літописи.2004.160.69 (https://doi.org/10.4007%2Fannals.2004.160.69) . MR 2119718 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2119718) .
5. Пінкалл, Ульріх; Полтьє, Конрад (1993). "Обчислення дискретних мінімальних поверхонь та їх кон'югатів" (http://projecteuclid.org/euclid.em/1062620735) . *Експериментальна математика* . 2 (1): 15–36. doi : 10.1080 / 10586458.1993.10504266 (https://doi.org/10.1080%2F10586458.1993.10504266) . MR 1246481 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1246481) .
6. Ніл, Роберт (2009). "Мартингельський підхід до мінімальних поверхонь". *Журнал функціонального аналізу* . **256** (8): 2440–2472. arXiv : 0805.0556 (https://arxiv.org/abs/0805.0556) . doi : 10.1016 / j.jfa.2008.06.033 (https://doi.org/10.1016%2Fj.jfa.2008.06.033) . MR 2502522 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2502522) .
7. Терасакі, Марк; Шемеш, Том; Кастурі, Нараянан; Клемм, Робін В.; Шалек, Річард; Хейворт, Кеннет Дж .; Рука, Артур Р .; Янкова, Майя; Хубер, Грег (2013-07-18). "Складені аркуші ендоплазматичного ретикулума з'єднані мотивами гелікоїдної мембрани" (https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3767119) . *Осередок* . **154** (2): 285–296. doi : 10.1016 / j.cell.2013.06.031 (https://doi.org/10.1016%2Fj.cell.2013.06.031) . ISSN 0092-8674 (https://www.worldcat.org/issn/0092-8674) . ПМК 3767119 (https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3767119) . PMID 23870120 (https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23870120) .
8. Chruściel, Piotr T .; Галлоуей, Грегорі Дж .; Поллак, Даніель (2010). "Математична загальна відносність: пробовідбірник". *Бик. Амер. Математика. Соц.* **47** (4): 567–638. arXiv : 1004.1016 (https://arxiv.org/abs/1004.1016) . Bibcode : 2010arXiv1004.1016C (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1004.1016C) . doi : 10.1090 / S0273-0979-2010-01304-5 (https://doi.org/10.1090%2FS0273-0979-2010-01304-5) . MR 2721040 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2721040) .
9. Eichmair, Michael (2009). "Проблема Плато для крайових зовнішніх захоплених поверхонь" (http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1264601035) . *Журнал диференціальної геометрії* . **83** (3): 551–584. arXiv : 0711.4139 (https://arxiv.org/abs/0711.4139) . Bibcode : 2007arXiv0711.4139E (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007arXiv0711.4139E) . doi : 10.4310 / jdg / 1264601035 (https://doi.org/10.4310%2Fjdg%2F1264601035) . MR 2581357 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2581357) .

Подальше читання

- Оссерман, Роберт (1986). *Огляд мінімальних поверхонь* (Друге видання). Нью-Йорк: Dover Publications, Inc. ISBN 978-0-486-64998-6. MR 0852409 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0852409) . *(Вступний текст для поверхонь* n- *розмірів, включаючи* n = *3; вимагає сильних обчислень, але не знає диференціальної геометрії.)*
- Karcher, Hermann; Полтьє, Конрад (1995). "Торкання мильних плівок - вступ до мінімальних поверхонь" (http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/booklet/intro.html). Отримано 27 грудня 2006 року . *(графічне введення до мінімальних поверхонь та мильних плівок.)*
- Різні (2000–). "EG-моделі" (http://www.eg-models.de/models.html). Отримано 28 вересня 2004 року . Перевірте значення дати в: |year=(довідка) *(Інтернет-журнал з кількома опублікованими моделями мінімальних поверхонь)*
- Стюарт Діксон (1996). "Наукова конкретизація: відповідність студенту з вадами зору" (http://www.eg-models.de/models.html) . *ВР у школі, том 1, номер 4* . Отримано 15 квітня 2006 року . *(Описує відкриття поверхні Кости)*
- Мартін Штеффенс та Крістіан Тейтцель. "Бібліотека мінімальної поверхні винограду" (http://numod.ins.uni-bonn.de/grape/EXAMPLES/AMANDUS/amandus.html). Отримано 27 жовтня 2008 року . *(Колекція мінімальних поверхонь)*
- Девід Гофман, Джим Гофман ; та ін. "Проект наукової графіки" (https://web.archive.org/web/20060703193416/http://www.msri.org/about/sgp/jim/geom/minimal/index.html) . Заархівовано з оригіналу (http://www.msri.org/about/sgp/jim/geom/minimal/index.html) 3 липня 2006 року . Отримано 24 квітня 2006 року . *(Колекція мінімальних поверхонь із класичними та сучасними прикладами)*
- Яцек Клиновський. "Галерея періодичних мінімальних поверхонь" (http://www-klinowski.ch.cam.ac.uk/pmsgal1.html). Отримано 2 лютого 2009 року . *(Колекція мінімальних поверхонь із класичними та сучасними прикладами)*
- Діркес, Ульріх; Хільдебрандт, Стефан; Совіньй, Фрідріх (2010). *Мінімальні поверхні* . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. **339** . За сприяння та внеску А. Кюстера та Р. Якоба (Друге видання). Гейдельберг: Спрингер. doi : 10.1007 / 978-3-642-11698-8 (https://doi.org/10.1007%2F978-3-642-11698-8) . ISBN 978-3-642-11697-1. MR 2566897 (https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2566897) . *(Огляд теорії мінімальної поверхні, особливо в крайових задачах. Містить широкі посилання на літературу.)*

Зовнішні посилання

- Hazewinkel, Michiel , ред. (2001) [1994], "Мінімальна поверхня" (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/m063920) , *Енциклопедія математики* , Springer Science + Business Media BV / Академічні видавці Kluwer, ISBN 978-1-55608-010-4
- Домашня сторінка 3D-XplorMath-J - програма Java та аплети для інтерактивної математичної візуалізації (http://3d-xplormath.org/j/index.html)
- Галерея обертових мінімальних поверхонь (http://xahlee.org/surface/gallery_m.html)
- Галерея, що обертається / збільшує мінімальну поверхню на основі WebGL (http://www.princeton.edu/~rvdb/WebGL/minsurf.html)